

R: Hookes lov

Spenning og tøyning

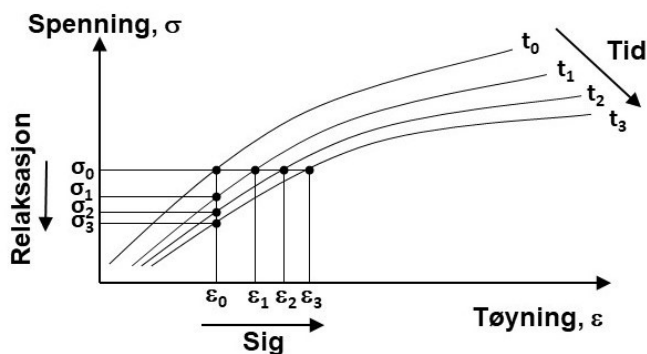
Hookes lov dreier seg om forholdet mellom spenning og tøyning for et materiale og er sentral i mange sammenhenger når rør styrkeberegnes. Du kan for eksempel bestemme hvor mye tøyning du får når du påfører en viss kraft.

Materialspenning er kraft per arealenheter – for eksempel i N/mm² (MPa) mens tøyning er en relativ størrelse – enten dimensjonsløs eller i m/m eller mm/mm.

Elastisitetsmodulen (E-modulen) er ikke en konstant for viskoelastiske materialer. Når tøyningen er konstant avtar spenningen med tiden (relaksasjon) og når spenningen er konstant øker tøyningen med tiden (sig). Det betyr at E-modulen reduseres med tiden belastningen står på.

Fjernes belastningen for så å bli påført igjen, så har vi et nytt belastningstilfelle – vi begynner på null igjen. Belastningens varighet må man derfor vite noe om. Faktisk er det slik at E-modulen i plastmaterialer øker med tiden – materialet blir sterkere. Men det ser vi bort fra ved lastberegning.

Under belastningstiden vil det oppstå tøyning. Er tiden kort før belastningen fjernes, vil tøyningen gå helt tilbake og materialet har en tilnærmet elastisk oppførsel. Er belastningstiden lang nok, vil materialet ha en varig tøyning – det endrer form som en væske. Derav viskoelastisk – der «visko» henspiller på væske.



Relaksasjon og sig som funksjon av tid

For viskoelastiske materialer, som for eksempel termoplastene, krever derfor bruk av Hookes lov et bevisst valg av størrelse av parameterne - ettersom egenskapene er tidsavhengige. I spesielle tilfeller må vi også ta hensyn til at materialegenskapene i tillegg er avhengige av temperatur og spenningsnivå.

Hookes lov:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad [\text{N/mm}^2]$$

- E: Elastisitetsmodul [N/mm²]
- σ : Materialspenning [N/mm²] = Kraft (F)/Areal (A)
- ϵ : Relativ tøyning [m/m, mm/mm]

Hvilken E-modul skal vi velge?

Normalt kan vi forholde oss enten til korttidsverdien eller langtidsverdien for E-modul ved romtemperatur. Veiledende verdier for disse oppgis som konstanter for ulike materialer. Korttidsverdier benyttes ved belastninger med noen få minutters varighet, mens langtidsverdiene benyttes ellers.

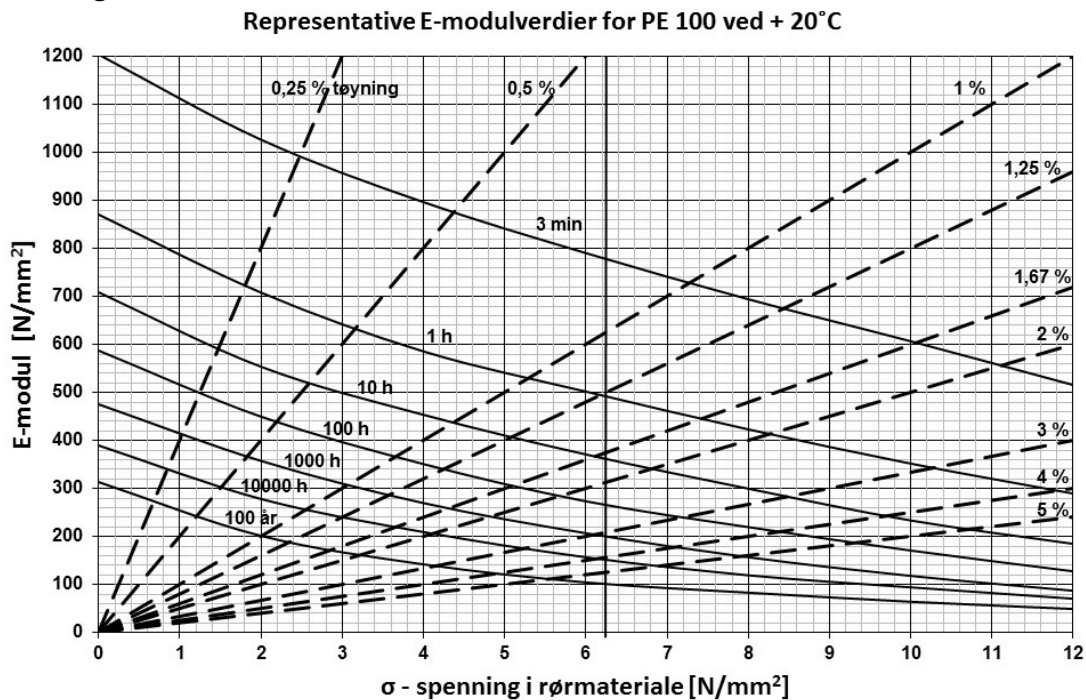
I virkeligheten er E-modul avhengig av spenningsnivå i tillegg til varighet og temperatur- og man må passe på at tøyningen ikke overstiger grenseverdiene (se egne diagram for PVC-U og PE 100). I spesielle tilfeller bør man derfor velge en annen verdi for E-modul. I vår sammenheng er dette stort sett bare aktuelt i forbindelse med svært spesielle tilfeller ettersom dette er ivaretatt i ulike standarder og preaksepterte løsninger er brukt.

Veiledende verdier for kort- og langtids E-modul for vanlige rørmaterialer:

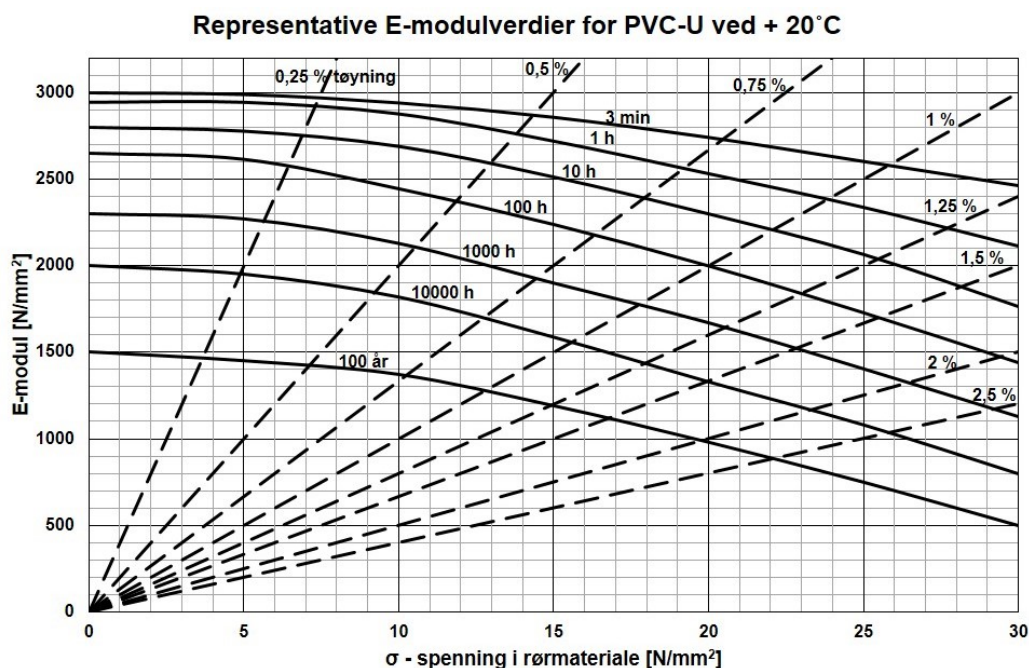
Rørmateriale	Korttids E-modul	Langtids E-modul
PVC-U	3000 N/mm ²	1000 N/mm ²
PE 100	1000 N/mm ²	200 N/mm ²
PE 80	800 N/mm ²	160 N/mm ²
PP*	1250 N/mm ²	300 N/mm ²

* PP leveres med ulike E-moduler. De oppgitte verdiene er konservative.

Veiledende verdier for E-modul avhengig av tid, belastningens varighet, spenningsnivå og tøyning gis av diagrammene:



E-modul for rørmaterialet PE 100 som funksjon av tid, spenning og tøyning ved 20°C. Tillatt langtidstøyning for PE 100 er 5,0 %. Bruddspenningen ved 50 år er 10,0 N/mm². Dimensjonerende spenning for en langtidsbelastning er 6,3 N/mm² ved sikkerhetsfaktor 1,6 og 8,0 N/mm² ved designkoeffisient 1,25.



E-modul for rørmaterialet PVC-U som funksjon av tid, spenning og tøyning ved 20°C. Tillatt langtidstøyning for PVC-U er 2,5 %. Bruddspenningen ved 50 år er 25,0 N/mm². Dimensjonerende spenning for en langtidsbelastning er 10,0 N/mm² ved sikkerhetsfaktor 2,5 og 12,5 N/mm² ved designkoeffisient 2,0.

Materialspenning i ringretning som følge av innvendig trykk

Når røret utsettes for et innvendig trykk, så oppstår det spenninger i ringretning (tangensialt). Denne spenningen kan beregnes slik:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot d_m}{2 \cdot e} = \frac{p}{2} (\text{SDR} - 1) \quad [\text{N/mm}^2]$$

p: Innvendig trykk [N/mm²]
1 bar = 0,1 N/mm²

d_m: Middeldiameteren, d_m=D-e [mm]

SDR - Standard Dimension Ratio eller standard dimensjonsforhold: SDR=D/e []

D: Utvendig diameter [mm]

e: Veggykkelse [mm]

Eksempel:

Hvis trykket er 10 bar (1,0 N/mm²) for et 225 mm SDR 11 PE 100 rør med veggykkelse 20,5 mm, så blir resultatet:

$$\sigma_t = \frac{1,0 \text{ N/mm}^2 \cdot (225 \text{ mm} - 20,5 \text{ mm})}{2 \cdot 20,5 \text{ mm}} = 5,0 \text{ N/mm}^2$$

Eller

$$\sigma_t = \frac{1,0 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot (11 - 1) = 5,0 \text{ N/mm}^2$$

Materialspenning i lengderetning som følge av innvendig trykk

Tverrkontraksjon:

Hvis man setter trykk på en frittliggende (ikke forankret) ledning vil diameteren øke litt og den vil krympe i lengderetning. Dette kalles tverrkontraksjon. Forholdet mellom spenning eller tøyning i ringretning og lengderetning er for praktiske formål en konstant for plastrør som kalles tverrkontraksjonskoeffisienten, $\nu = -\frac{\epsilon_{\text{aksialt}}}{\epsilon_{\text{tangensialt}}} = -\frac{\sigma_{\text{aksialt}}}{\sigma_{\text{tangensialt}}}$. Når tøyningen i ringretning er positiv (strekk) blir lengdeendringen negativ (krymp) og tverrkontraksjonskoeffisienten et positivt tall.

I en fastspent (forankret) ledning vil det oppstå materialspenninger i lengderetning i rørveggen i og med at røret ikke kan bevege seg. Materialspenningen i lengderetningen for fastspente ledninger på grunn av påført trykk finnes ved å multiplisere spenningen i ringretning med tverrkontraksjons-koeffisienten: $\sigma_a = \nu \cdot \sigma_t$ [N/mm²]. Vi kan normalt bruke tverrkontraksjonskoeffisienten 0,45 for PE og PP og 0,40 for PVC.

Eksempel:

I dette tilfellet blir strekkspenningen i lengderetning: $\sigma_a = \nu \cdot \sigma_t = 0,45 \cdot 5,0 \text{ N/mm}^2 = 2,25 \text{ N/mm}^2$

Materialspenning i lengderetning som følge av temperaturendring og nektet lengdeendring

Et fastspent rør som utsettes for temperaturvariasjoner vil gi skyve- og trekkekrefter mot forankringene – ettersom det nektes å endre lengde. Nektet lengdeendring gir også tøyning i rørmaterialet vi må ta hensyn til. Utvidelseskoeffisienten for PE 100 er 0,16 mm/m°C – eller 0,00016 m/m°C. Kraft og tøyning er derfor kun avhengig av temperaturdifferansen – ikke rørlengden. En temperaturdifferanse på 30 °C gir for eksempel en relativ tøyning på 0,00016 m/m°C · 30 °C = 0,0048 (m/m) for et fastspent PE 100 rør. Er det ikke fastspent blir lengdeendringen 0,0048 m/m – eller 4,8 mm/m. Ved hjelp av Hookes lov kan vi finne hvor store spenninger - og dermed krefter - som oppstår når røret er fastspent.

For fastspente PE-rør er det lurt å legge røret i bue(r) for å redusere spenninger og krefter.

Eksempel

Et 200 meter langt PE 100 rør vil krympe 960 mm i lengderetning hvis det ikke er forankret og temperaturen i rørveggen faller 30 °C fra det ligger i sola til det er gjenfylt. Hvis det er forankret i begge ender, ville det oppstå tøyning med tilhørende spenninger i rørveggen på grunn av nektet lengdeendring. Tøyningen er konstant og spenningene avtar med tiden (relaksasjon).

Tøyningen, eller den relative lengdeendringen, ville blitt: $\varepsilon = \frac{0,96 \text{ m}}{200 \text{ m}} = 0,0048 \frac{\text{m}}{\text{m}}$, altså det samme som vi får når vi multipliserer 0,00016 m/m°C med 30 °C.

Dette tallet representerer altså tøyningen i det forankrede røret og det er denne verdien vi må bruke i Hookes lov for å regne ut spenningene som oppstår.

Vi velger langtids E-modul for PE 100, som er 200 N/mm², fordi temperaturendringen er varig - og benytter Hookes lov:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = 200 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,0048 = 0,96 \text{ N/mm}^2$$

Materialspenningen i lengderetning (aksielt) etter lang tid, som følge av at røret ikke får bevege seg, er 0,96 N/mm².

Umiddelbart etter installasjon blir spenningen større. For å beregne denne må en bruke korttids E-modul for PE 100, som er 1000 N/mm², i formelen. Da blir materialspenningen 4,8 N/mm². I praksis blir spenningen noe lavere fordi tiden det tar å redusere temperaturen er lengre enn noen få minutter. Til tross for den relativt høye spenningen er ikke dette så ille - som vi skal se senere. Spenningsrelaksasjonen går raskt i begynnelsen - i løpet av noen timer er spenningen kraftig redusert.

Men summen av maksimumspenninger i lengderetning blir dimensjonerende for forankringene. De faktiske kreftene som oppstår kan bli store. I dette eksempelet vil et 200 mm SDR 11 rør umiddelbart dra med en kraft på 4,8 N/mm² · rørveggens areal i mm²: 4,8 N/mm² · 10 395 mm² = 49 895 N = 49,9 kN - som tilsvarer 5,1 tonn. Dette er nærmere forklart senere.

Resulterende materialspenning

Gitt et tilfelle med en forankret og trykksatt rørledning med en temperaturreduksjon, så har vi flere spenninger som virker både i ringretning (σ_t) og i lengderetning (σ_a). For å finne den samlede spenningen - resultantspenningen - benyttes von Mises teori for spenninger i et plan:

$$\sigma_{res} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_a^2 - \sigma_t \cdot \sigma_a} \quad [\text{N/mm}^2]$$

Ved overtrykk i ledningen blir spenningen i ringretning en positiv strekkspenning. Spenningen i lengderetning blir en positiv strekkspenning ved tverrkontraksjon og ved temperaturreduksjon. Spenningen på grunn av temperaturøkning blir en negativ trykkspenning. Av formelen ser vi at resultantspenningen blir større om spenningene har motsatt fortegn enn om spenningene har samme fortegn.

Eksempel:

Vi bruker verdier fra eksemplene over.

- Positiv strekkspenning i ringretning pga. innvendig overtrykk: 5,0 N/mm²
- Positiv strekkspenning i lengderetning pga. tverrkontraksjon: 2,25 N/mm²
- Positiv strekkspenning i lengderetning pga. varig temperaturreduksjon: 0,96 N/mm²
- Summen av de positive spenningene i lengderetning: 2,25 N/mm² + 0,96 N/mm² = 3,2 N/mm²

$$\sigma_{res} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_a^2 - \sigma_t \cdot \sigma_a}$$

↓

$$\sigma_{res} = \sqrt{(5,0 \text{ N/mm}^2)^2 + (3,2 \text{ N/mm}^2)^2 - (5,0 \text{ N/mm}^2) \cdot (3,2 \text{ N/mm}^2)} = 4,4 \text{ N/mm}^2$$

OBS!

- Trykkspenninger, for eksempel ved undertrykk eller ved temperaturøkning, er negative. Pass på fortegnene!
- Ved beregning av sikkerhetsfaktor med tanke på levetid benyttes langtidsspenning som følge av temperaturendringen, mens korttidsspenning benyttes ved dimensjonering av forankring. Det tillates høyere spenning for en kortidsbelastning enn for en langtidsbelastning. Hvor langvarig er belastningene?
- Maksimum kraft som virker på en forankring finnes ved å multiplisere korttids resultantspenning i lengderetning med tverrsnittsarealet av rørveggen – se neste avsnitt.

Bruddspenningen (MRS) for PE 100 er 10 N/mm². Sikkerhetsfaktoren for eksemplet over blir da:

$$S_f = \frac{MRS}{\sigma_{res}} = \frac{10 \text{ N/mm}^2}{4,4 \text{ N/mm}^2} = 2,3$$

Altså høyere enn om vi bare hadde tatt hensyn til spenningen i ringretning som følge av det innvendige overtrykket.

Maksimum dimensjonerende spenning for PE 100 materialet er 8,0 N/mm² for 50 års belastningstid, mens minimum bruddspenning (MRS) er 10,0 N/mm² for 50 års belastningstid -

noe som gir en designkoeffisient på 1,25. For en korttidsbelastning vil bruddspenningen være høyere og man kan tillate høyere opptredende spenning. Man bør uansett sørge for at sikkerhetsfaktoren er tilfredsstillende - noe som bør vurderes fra gang til gang. Men det advares mot ikke å ta hensyn til uforutsette tilleggslastninger som påføres under installasjon eller drift.

I Norge har det vært vanlig å dimensjonere i forhold til vanntrykket og ha en høy sikkerhetsfaktor (1,6 for PE) til disposisjon for kjente og ukjente tilleggsspenninger. Vi ser at dette er i endring og det er viktig at den prosjekterende er kjent med ulike forhold og at den utførende ikke påfører unødvendige tilleggsspenninger i installasjonsfasen - for eksempel ved å spenne fast røret før det er akklimatisert eller ved å tvinge røret i riktig posisjon ved montering med flenser.

Hvor store krefter oppstår på grunn av materialspenningene?

Den største kraften røret vil virke med finner vi ved å multiplisere korttidsspenningene i lengderetning med tverrsnittsarealet av rørveggen.

Tverrsnittsarealet av rørveggen er:

$$A_{\text{rør}} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \quad [\text{mm}^2]$$

D: utvendig diameter [mm]

d: innvendig diameter [mm]

Kraften er:

$$F = \sigma_a \cdot A_{\text{rør}} \quad [\text{N}]$$

Eksempel:

Når røret er et 225 mm SDR 11 rør med veggtykkelse 20,5 mm er innvendig diameter 184,0 mm. Da er tverrsnittsarealet

$$A_{\text{rør}} = \frac{\pi}{4} [(225 \text{ mm})^2 - (184,0 \text{ mm})^2] = 13170 \text{ mm}^2$$

Hvis summen av de strekkraftene i lengderetning (σ_a) er 7,3 N/mm² blir kraften mot forankringene

$$F = \sigma_a \cdot A_{\text{rør}} = 7,3 \text{ N/mm}^2 \cdot 13170 \text{ mm}^2 = 96141 \text{ N} = 96,1 \text{ kN (som tilsvarer 9,8 tonn).}$$

Husk å legge på en sikkerhetsfaktor når du dimensjonerer forankringene.